Grado en Física

Ejercicios de Análisis Matemático I – Relación 6

Sucesiones – Integrales – Aplicaciones de las integrales

Sucesiones. Las herramientas más útiles para calcular límites de sucesiones son el *criterio de Stolz* (teorema 7.37[1]) y sus consecuencias, los *criterios de la media aritmética y la media geométrica* (proposiciones 7.38, 7.39 y 7.40), y el *criterio de equivalencia logarítmica* (teorema 7.50). Con frecuencia el límite de una sucesión puede obtenerse como un *caso particular de un límite funcional* (ver proposición 7.41 y estrategia 7.43) el cual puede calcularse con las técnicas que ya debes conocer. Además, debes usar siempre que puedas *equivalencias asintóticas* para sustituir en un **producto** o en un **cociente** de sucesiones, una de ellas por otra asintóticamente equivalente. Para ello debes saber de memoria los límites que aparecen en la proposición 7.42 (que son los mismos que ya debes conocer para funciones). En mi libro de Cálculo Diferencial hay muchos ejercicios resueltos de cálculo de sucesiones.

Teorema Fundamental del Cálculo. Debes saber usarlo para derivar funciones de la forma

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donde f es una función continua y g es una función derivable. Esto se explica en la estrategia 8.19.

Cálculo de primitivas. La tabla de primitivas inmediatas que hay en la sección 8.6.3 debes aprenderla de memoria.

Ejercicios

1. Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ dadas por:

a) $x_n = \left(\dfrac{4\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^4}\right)^n$.

b) $x_n = \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n!}$.

c) $x_n = \dfrac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$.

d) $x_n = n^2\left(1+\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

2. Calcula los límites de las siguientes sucesiones expresándolas como sumas de Riemann.

$$a)\ x_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+n)}}$$

$$b)\ x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

$$c)\ x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)k}{n^3}$$

[1] Las referencias son a mi libro *Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de Una Variable*

3. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

$$a)\ F(x) = \int_{x^2}^{1} \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(t^2)}\,\mathrm{d}t \qquad b)\ F(x) = \int_{\ln x}^{2\sqrt{x}} \frac{1}{1+\sqrt[3]{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

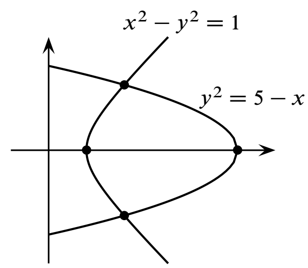
4. Calcula los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t} \qquad b)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}}-1\right)\mathrm{d}t}{x^3} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_1^{x^2+1}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

5. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$a)\ \int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

6.



Calcula el área de la región del plano comprendida entre la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y la parábola $y^2 = 5 - x$.

7. Calcula la integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{17-28x+15x^2}{-5+4x+4x^2-4x^3+x^4}\,\mathrm{d}x$.

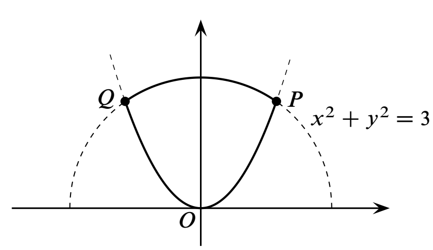
8. Calcula el volumen de los cuerpos de revolución obtenidos al girar la región del plano comprendida entre los ejes coordenados y la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

alrededor del eje de abscisas y alrededor del eje de ordenadas.

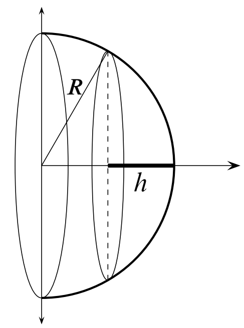
9. Calcula la longitud de la curva dada por $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ para $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

10.



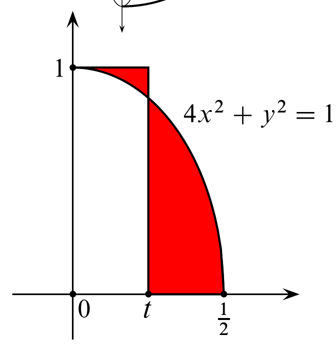
Sean P y Q los puntos de corte de la curva $y = \sqrt{2}x^2$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$. Calcula la longitud de la curva $OPQO$ formada con los correspondientes trozos de las curvas anteriores, siendo O el origen de coordenadas.

11.



Prueba que el área de un casquete esférico de radio R y altura h es igual a $2\pi Rh$.

12.



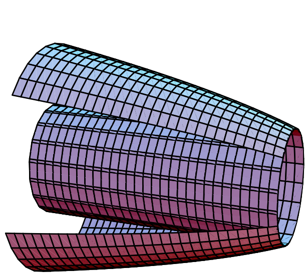
Sea $A(t)$ el área de la región del plano (sombreada en gris en la figura) comprendida entre la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$, la recta horizontal $y = 1$ y la recta vertical $x = t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 1/2$. Se pide calcular los valores máximo y mínimo absolutos de $A(t)$ en el intervalo $[0, 1/2]$.

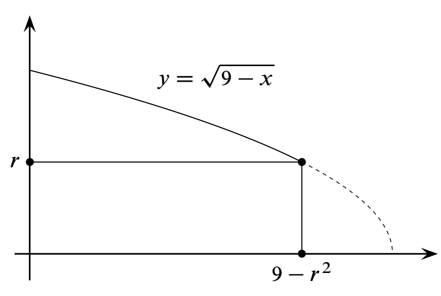
13. En el sólido generado haciendo girar la región acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y la parábola $y^2 = 9 - x$ alrededor del eje OX, se perfora un orificio cilíndrico circular de radio r centrado en el eje de revolución.

a) Calcula por el método de las láminas o capas y de los discos o arandelas el volumen del sólido resultante.

b) Calcula el área de la superficie total de dicho sólido.

c) Calcula los valores de r para los que dicha área alcanza sus valores extremos.





Para entregar el lunes 21 de enero.